

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ
GEOPHYSICAL METHODS OF PROSPECTING AND EXPLORATION

УДК 550.371.4 519.632.4

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ НА ПОСТОЯННОМ ТОКЕ
ПОСРЕДСТВОМ ГЛОБАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Н.А. СЕВОСТЬЯНОВ, М.Н. ЮДИН

*ФГБОУ ВО «Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе»
23, Миклухо-Маклая ул., г. Москва 117997, Россия
e-mail: sevostyanovnk@yandex.ru, yudinmn@gmail.com*

Обсуждается решение трёхмерной задачи геоэлектрики на постоянном токе. Решение задачи строится на основе глобальной декомпозиции (ГДАМ). Алгоритм заключается в итерационной реконструкции решения из двух базисных элементов — поля точечного источника в слоистой (фоновой) среде и решения в локальной вставке. В качестве фоновой (нормальной) модели используется горизонтально-слоистая среда, в одном из слоёв которой расположен точечный источник постоянного тока. Фоновая среда содержит ограниченное включение с достаточно произвольным распределением удельного электрического сопротивления. Задача состоит в изучении влияния вставки на нормальное поле. Работа алгоритма решения задачи проиллюстрирована на примере однородного полупространства (трёхслойная горизонтально-слоистая среда с одинаковой проводимостью слоёв). Точечный источник расположен в первом слое. Второй слой содержит однородное локальное тело (прямоугольный параллелепипед или конечный цилиндр). Решения задач Дирихле для уравнения Лапласа в этих телах известны. Для повышения точности вычислений в параллелепипеде потребовалось несколько изменить алгоритм расчета потенциала. Ускорение расчетов обеспечили вычисления коэффициентов Фурье с использованием прямого дискретного синус-преобразования. На основе приведённых в работе алгоритмов разработаны программы расчёта потенциала в локальных телах и выполнены численные эксперименты, позволившие графически представить результаты расчётов и сделать оценку точности вычислений.

Ключевые слова: прямые задачи; модели геоэлектрики; многомасштабное моделирование; глобальная декомпозиция; метод Шварца; метод итераций.

DOI:10.32454/0016-7762-2019-2-60-66

TO THE SOLUTION OF GEOELECTRIC PROBLEM ON A DIRECT
CURRENT BASED ON THE GLOBAL DECOMPOSITION

N.A. SEVOSTIANOV, M.N. YUDIN

*Russian State Geological Prospecting University
23, Miklouho-Maklay's street, Moscow 117997, Russia
e-mail: yudinmn@gmail.com, sevostyanovnk@yandex.ru*

The solution of a three-dimensional problem of geoelectric on a direct current is discussed. The solution of this task is constructed on the basis of global decomposition (GDAM). The algorithm consists in iterative reconstruction of the decision from two basic elements — field of a point source in the layered (background) environment and solution in

a local insertion. As a background (normal) model, the horizontally layered environment is used, in one of layers of which the point source of direct current is located. The background environment contains limited inclusion with enough arbitrary distribution of specific electrical resistance. The problem consists in studying of influence of an insertion on the normal field. The work of the algorithm of the solution of a task is illustrated on the example of a homogeneous half-space (the three-layer horizontally layered environment with identical conductivity of layers). The point source is located in the first layer. The second layer contains a homogeneous local body (a rectangular parallelepiped or a finite cylinder). Solutions of tasks of Dirikhle for Laplace's equation in these bodies are known. For the improving of the accuracy of calculations in a parallelepiped, the little change of an algorithm of calculation of potential was needed. Acceleration of calculations was provided by the calculations of Fourier coefficients with the use of direct discrete sine transformation. On the basis of the algorithms given in the work, the programs of calculation of potential in local insertions are developed and the numerical experiments which allowed presenting graphically calculation results and making assessments of accuracy of calculations, are executed.

Keywords: direct problem; models of geoelectrics; multiscale modeling; global decomposition; Schwarz's method; the iterative solution.

Постановка задачи

Иллюстрация различных аспектов декомпозиционного метода выполнена на примере полуаналитического решения трёхмерной задачи ВЭЗ. Классификация масштабов (уровней) декомпозиции приведена в [8].

Глобальная декомпозиция (рис. 1). Декомпозиционный альтернирующий метод (ДАМ) самого грубого масштаба, приводящий к необходимости последовательного автономного решения *внутренней* (в ограниченной области D) и *внешней* (в неограниченной области Ω) краевых задач, получил название глобального ДАМ (ГДАМ) [8]. ГДАМ нацелен на численное моделирование аномальных электромагнитных (ЭМ) полей в фоновых (как правило, *неограниченных*) моделях среды, содержащих неоднородные по физическим свойствам локальные тела¹.

Модель *а* предполагает последовательное решение задач в пересекающихся областях Ω (с гра-

ницей $\partial\Omega$) и D (с границей ∂D) [2, 8]. Решение в ограниченной области D с границей ∂D находится численно (например, по методу конечных разностей или методу конечных элементов). ЭМ — поля в неограниченной (внешней) области Ω с границей $\partial\Omega$ вычисляются по известным аналитическим или асимптотическим решениям. Область Ω имеет непустое пересечение с сеточной областью D . Решение, найденное в области D , в согласии с алгоритмом ДАМ, итерационно «сшивается» с решениями в области Ω .

Модель *б*. В этой модели $D \subset \Omega$, что соответствует модифицированному алгоритму Шварца [7, 8]. В соответствии с этим алгоритмом решение общей задачи конструируется из последовательного решения двух подзадач.

I. Задачи в фоновой среде, содержащей вставку D , в которой предполагается известной текущая величина плотностей источников аномального поля.

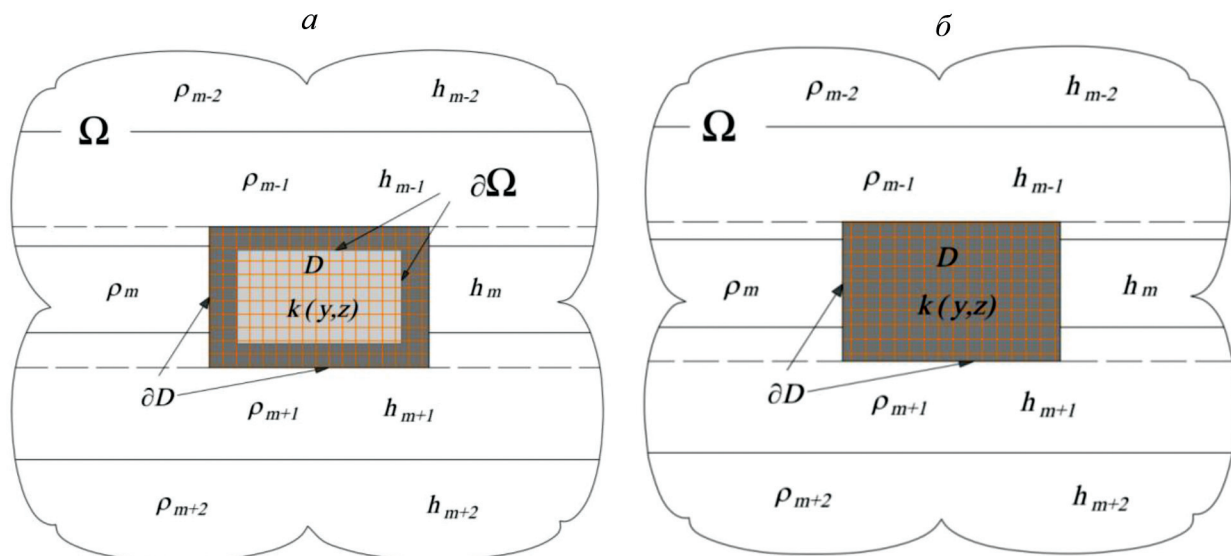


Рис. 1. Вид областей при глобальной декомпозиции: *а* — классический ДАМ: $\Omega \cap D \neq \emptyset, \Omega \cup D = R^n, n = 2, 3$; *б* — модифицированный ДАМ: $D \subset \Omega \subseteq R^n, \Omega \cap D = D, n = 2, 3$; Ω — неограниченная область с границей $\partial\Omega$, D — ограниченная область с границей ∂D , пересечение областей Ω и D , ρ_m — удельные электрические сопротивления слоёв, h_m — мощности слоёв

¹ Особенно остро это ощущается при численном решении трёхмерных задач уже в случае относительно простых моделей.

II. Задачи Дирихле во вставке предполагает известными величины потенциала на её границе.

Задавая в D начальное приближение к плотностям источников аномального поля, решаем первую задачу и рассчитываем поле на границе ∂D . Решая вторую задачу, обновляем плотность источников аномального поля в D . Повторяем решение этих задач до тех пор, пока не выполнится некоторый критерий завершения итерационного процесса.

Пример решения трехмерной задачи ВЭЗ на основе глобальной декомпозиции

Внешняя краевая задача. Математическая модель геофизики состоит из трёх основных элементов: модели среды, модели источника и дифференциальной задачи, описывающей поведение поля в среде. Здесь используем такую же модель, как в [6]. Будем полагать, что нормальной моделью является трёхслойная горизонтально-слоистая среда с проводимостями слоёв σ_n ($n = 1, 2, 3$) и мощностями h_n ($h_3 = \infty$). Второй слой модели содержит *неоднородное локальное включение* Π с границей $\partial\Pi$ и проводимостью σ , которое имеет форму прямоугольного параллелепипеда или цилиндра [6, рис. 1].

Искомая функция $u(x, y, z)$ представлена суммой нормального $U_n(x, y, z)$ и аномального $U_a(x, y, z)$ потенциалов. В каждом однородном слое скалярный потенциал U_a удовлетворяет уравнению Лапласа, а в слоях, содержащих неоднородности, — уравнению Пуассона

$$\Delta U_a(x, y, z) = \sigma_n^{-1} \operatorname{div}(\sigma - \sigma_n) \times \operatorname{grad}[U_n(x, y, z) + U_a(x, y, z)]. \quad (1)$$

Алгоритмы решения первой подзадачи в слоистой среде, содержащей вставку Π , обсуждался в [6].

Внутренняя краевая задача. Остановимся более подробно на решении подзадачи II в однородных по проводимости локальных телах, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда и цилиндра конечных размеров. Решения краевых задач для ряда областей приведены в [1].

А. Прямоугольный параллелепипед (рис. 2). Пусть источник расположен на глубине h ($0 \leq h < h_1$), однородное локальное тело Π

$$\Pi = \{(x, y, z) | 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$$

с постоянной проводимостью σ и границей $\partial\Pi$, лежит во втором слое трёхслойной среды. Требуется найти непрерывный в замкнутой области Π потенциал $u(x, y, z)$, удовлетворяющий в области Π уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in \Pi \quad (2)$$

и принимающий на границе заданные значения

$$u|_{\partial\Pi} = f(x, y, z) \in C(\partial\Pi). \quad (3)$$

Функция $f(x, y, z)$, рассчитывается в результате решения задачи I. Пусть на гранях тела функции $f(x, y, z)$, соответствуют функции f_s , $s = 1, 6$:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f(0, y, z) = f_1(y, z), & u|_{x=a} &= f(a, y, z) = f_2(y, z), \\ u|_{y=0} &= f(x, 0, z) = f_3(x, z), & u|_{y=b} &= f(x, b, z) = f_4(x, z), \\ u|_{z=0} &= f(x, y, 0) = f_5(x, y), & u|_{z=c} &= f(x, y, c) = f_6(x, y), \end{aligned}$$

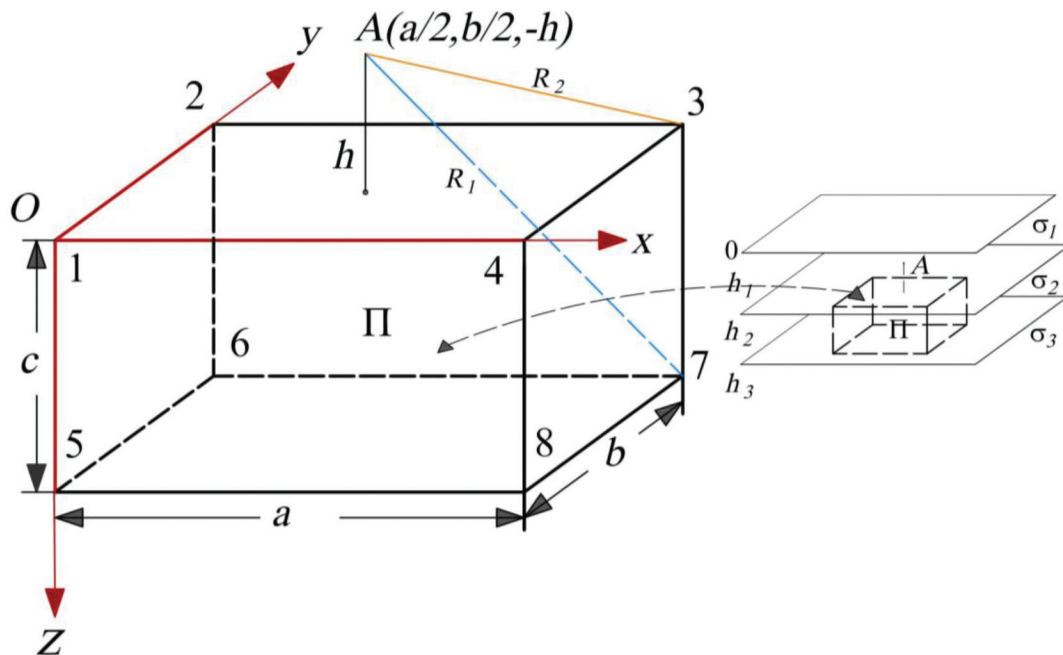


Рис. 2. Локальное тело — параллелепипед с размерами $a \times b \times c$, 1—8 — номера вершин; O — начало координат, $A(x_s, y_s, z_s)$ — точечный источник, $z_s = (-h)$ — аппликата источника. h_1 — h_3 — мощности, σ_1 — σ_3 — проводимости слоёв

а в вершинах параллелепипеда $u(x, y, z)$, имеет значения $U_1, \dots, U_8$. Для обеспечения непрерывности решения на границе построим вспомогательную гармоническую функцию $\tilde{U}(x, y, z)$, совпадающую в углах с U_i , $i = 1, 8$. Одной из таких функций является

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, y, z) = & U_1 p_1(x, a) p_1(y, b) p_1(z, c) + \\ & + U_2 p_1(x, a) p_2(y, b) p_1(z, c) + U_3 p_2(x, a) p_2(y, b) p_1(z, c) + \\ & + U_4 p_2(x, a) p_1(y, b) p_1(z, c) + U_5 p_1(x, a) p_1(y, b) p_2(z, c) + \\ & + U_6 p_1(x, a) p_2(y, b) p_2(z, c) + U_7 p_2(x, a) p_2(y, b) p_2(z, c) + \\ & + U_8 p_2(x, a) p_1(y, b) p_2(z, c), \end{aligned}$$

где

$$p_1(t, d) := 1 - t/d, \quad p_2(t, d) := t/d, \quad t \in [0, d].$$

Примем

$$V(x, y, z) := u(x, y, z) - \tilde{U}(x, y, z).$$

Функция $V(x, y, z)$ — гармоническая в Π и равна нулю в углах фигуры. Используя принцип суперпозиции, представим её в виде суммы трёх гармонических функций [1]

$$V(x, y, z) = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + V_3(x, y, z),$$

удовлетворяющих различным краевым условиям. Например, для функции $V_1(x, y, z)$ они таковы:

$$V_1|_{x=0} = \varphi_1(y, z) = f_1(y, z) - \tilde{U}(0, y, z);$$

$$V_1|_{x=a} = \varphi_2(y, z) = f_2(y, z) - \tilde{U}(a, y, z).$$

Построение решения одной из этих задач позволяет записать расчётные формулы для двух других. Примем обозначения:

$$\varphi_s(y, z) := f_s(y, z) - \tilde{U}(0, y, z), \quad s = 1, 2.$$

$$q_1(\xi, n, d) := \frac{sh[\eta(d - \xi)]}{sh(\eta d)},$$

$$q_2(\xi, n, d) := \frac{sh[\eta \xi]}{sh(\eta d)}, \quad \xi \in [0, d], \quad \eta > 0.$$

Согласно [1], функция V_1 построена методом разделения переменных. В процессе решения получают систему собственных функций v_{mn} и собственных значений $\lambda_{mn}^{(1)}$:

$$v_{mn}(y, z) = \sqrt{4/bc} \sin(\pi m y / b) \sin(\pi n z / c),$$

$$\lambda_{mn}^{(1)} = \pi^2 (m^2 / b^2 + n^2 / c^2).$$

Решение V_1 представлено рядом Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) = & \\ = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\beta_{mn}^{(1)} q_1(x, \eta_{mn}, a) + \beta_{mn}^{(2)} q_2(x, \eta_{mn}, a)] \times \\ & \times \sin \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi n z}{c}, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором $\eta_{mn} := \sqrt{\lambda_{mn}^{(1)}}$, β_{mn}^s — коэффициенты разложения функций φ_s в ряды Фурье,

$$\beta_{mn}^{(s)} = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c \varphi_s(y, z) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{c}\right) dy dz, \quad (4.1)$$

$$s = 1, 2; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Аналогично находят функции $V_2(x, y, z)$ и $V_3(x, y, z)$, с очевидными изменениями в формулах (4) и (4.1). Окончательно получим:

$$V(x, y, z) = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + V_3(x, y, z), \quad (5)$$

$$u(x, y, z) := V(x, y, z) + \tilde{U}(x, y, z). \quad (6)$$

Для уменьшения времени вычислений мы использовали прямое и обратное дискретное синус-преобразование Фурье. Например, коэффициенты $\beta_{mn}^{(s)}$ вычислялись по формуле

$$\begin{aligned} \beta_{mn}^{(s)} \approx (\beta_s^h)_{mn} = & \frac{4}{(N_y - 1)(N_z - 1)} \sum_{k=1}^{N_z-1} \\ & \left[\sum_{j=1}^{N_y-1} (f_s^h)_{j,k} \sin\left(\frac{\pi m(j-1)}{N_y-1}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n(k-1)}{N_z-1}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $(f_s^h)_{j,k} = \varphi_s(y_j, z_k)$.

Заменяя в формуле (4) $\beta_{mn}^{(s)}$ на $(\beta_s^h)_{mn}$ получим:

$$\begin{aligned} V_1(x, y, z) \approx V_1^h(x, y, z) = & \\ = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(\beta_1^h)_{mn} q_1(x, \eta_{mn}, a) + (\beta_2^h)_{mn} q_2(x, \eta_{mn}, a)] \times \\ & \times \sin \frac{\pi m y}{b} \sin \frac{\pi n z}{c}, \end{aligned}$$

Численные эксперименты. Линейные размеры параллелепипеда: $a = 100$ м, $b = 100$ м, $c = 80$ м. Начало координат расположено в вершине параллелепипеда (рис. 2). Источник расположен над вставкой в точке с координатами $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -h\right)$ ($0 \leq h < h_1$).

Потенциал U_n точечного источника равен:

$$\begin{aligned} U_n(x, y, z) = & Q / R, \\ R = & \sqrt{(x - a/2)^2 + (y - b/2)^2 + (z + h)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

При тестировании программ полагали $u(x_i, y_j, z_k) = U_n(x_i, y_j, z_k)$, $Q = 1000$. Если в задаче (2) — (3) принять $f(x, y, z) = u|_{\partial \Pi}$, то её решение внутри параллелепипеда должно совпадать с функцией $U_n(x, y, z)$. Это служит хорошей основой для тестирования алгоритмов и программ, а также оценки точности вычислений. Результаты численных экспериментов показаны на рис. 3.

График на рис. 3, а иллюстрирует результаты расчётов суммы функций $V_1^h + V_2^h$. Рельеф на рис. 3, б отображает решение задачи (2) — (3) в параллелепипеде. Рис. 3, в показывает практическое совпаде-

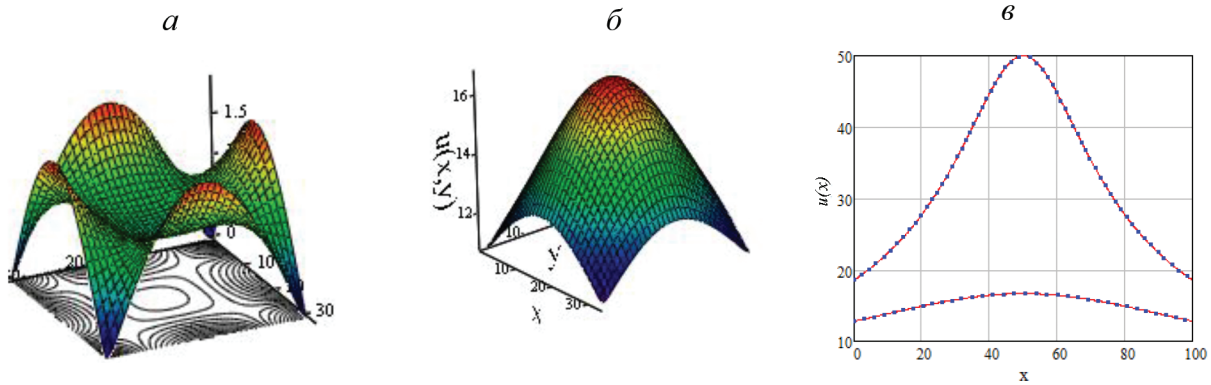


Рис. 3. Примеры расчётов (в плоскости $z = c/2$): а – сумма функций $V_1^h + V_2^h$, б – функция $V^h + \tilde{U}$, в – сравнение численного (точки) решения с аналитическим (сплошные линии) по частным профилям

ние в узлах сетки численного решения U^h (точки) и аналитического u (сплошная линия), рассчитанного по формуле (8). Максимальная величина относительной погрешности δ_N в плоскости $\tilde{z} = c/2$ при различном положении источника и числе узлов сетки $N = 8, 16, 32, 64$ не превышала 1% (при $N = 64$) и 4% (при $N = 8$).

Б. Конечный цилиндр. На рис. 4 изображена модель локального включения и его геометрические параметры, а также расположение точечного источника.

Источник расположен на поверхности земли в точке O — начале прямоугольной декартовой системы координат (x, y, z) . Точки $O_1(x_1, y_1, z_1)$ и $O_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на оси цилиндра радиуса a . Точка O_1 — начало цилиндрической системы координат $(r, \phi, \bar{z})$. Связь между координатами устанавливают следующие формулы:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_1 = r \cos \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi, & 0 \leq r \leq a, & r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \\ \bar{y} = y - y_1 = r \sin \phi, & \cos \phi = \bar{x}/r, & \sin \phi = \bar{y}/r, \\ \bar{z} = z - z_1, & z_1 \leq z \leq z_2, & z_1 = H, & z_2 = H + h. \end{cases}$$

Общий случай взаимного расположения источника и цилиндра.

Требуется найти потенциал $u = u(\rho, \phi, \bar{z})$, непрерывный в замкнутой области C , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}(\rho u_\rho)_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + u_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (9)$$

$$0 < \rho < a, \quad 0 < \bar{z} < h$$

и краевым условиям

$$u|_{\rho=a} = f(\phi, \bar{z}), \quad u|_{\bar{z}=0} = \psi_1(\rho, \phi), \quad u|_{\bar{z}=h} = \psi_2(\rho, \phi). \quad (10)$$

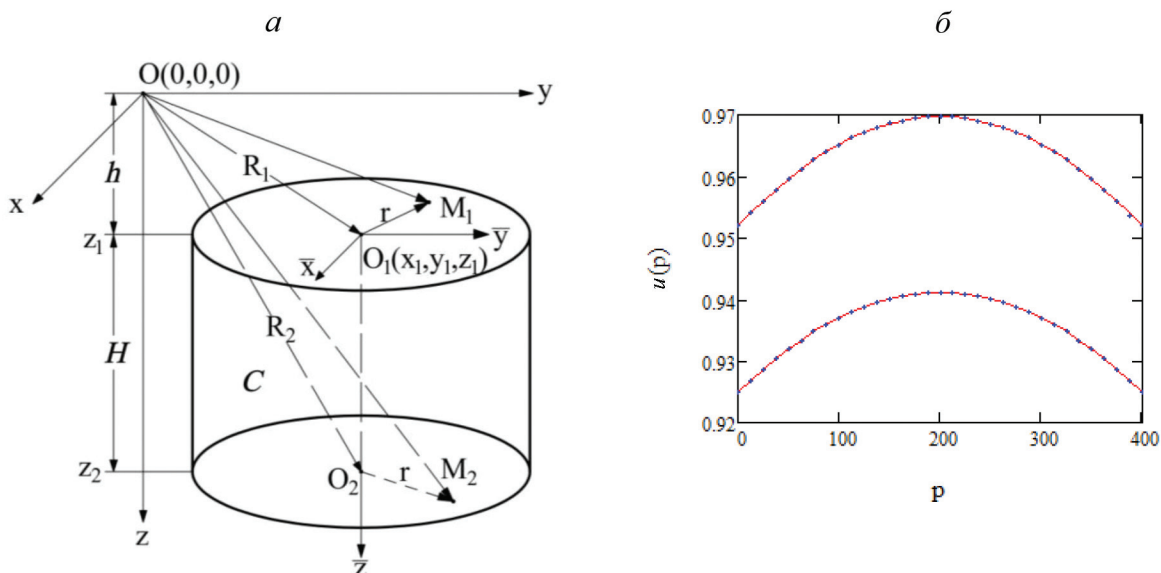


Рис. 4. Модель цилиндра радиуса r и точечного источника (а), O — начало координат, h — высота от начала координат до цилиндра, H — высота цилиндра, z_1 и z_2 — границы верхней и нижней крышки цилиндра, O_1 — центр верхней крышки цилиндра, O_2 — центр нижней крышки цилиндра, R_1 — расстояние от O до O_1 , R_2 — расстояние от O до O_2 , M_1 и M_2 произвольные точки на нижней и верхней границах цилиндра; б — сравнение численного (точки) решения с аналитическим (сплошные линии) по частным профилям

Общее решение находят в виде суммы решений трёх более простых задач: $u = u_1 + u_2 + u_3$ [1]. Например, решение первой подзадачи имеет вид:

$$u_1(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{1nm} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(C_1)_{mn} \cos(n, \phi) + (C_2)_{mn} \sin(n\phi)] \times \\ \times [I_n(\mu_m \rho) / I_n(\mu_m a)] \sin(\mu_m z),$$

где $\mu_m = \frac{pm}{h}$,

$$\begin{pmatrix} C_{1n,m} \\ C_{2n,m} \end{pmatrix} = \frac{2}{ph \cdot \varepsilon(n)} \int_0^{2\pi} \int_0^h f(\phi, z) \sin(\mu_m z) \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{pmatrix} dz d\phi, \\ \varepsilon(n) = \begin{cases} 2 & \text{при } n=0, \\ 1 & \text{при } n>0. \end{cases}$$

По аналогии с решением для прямоугольного параллелепипеда (см. формулу (7)) дискретные аналоги формул для приближенного вычисления коэффициентов имеют вид:

$$C_{1nm} \approx (C_1^h)_{nm} = \frac{4}{\varepsilon(n) N_z N_\phi} \times \\ \times \sum_{k=0}^{N_z-1} \left[\sum_{j=0}^{N_\phi-1} (f_s^h)_{j,k} \cos\left(\frac{2pnj}{N_\phi}\right) \right] \sin\left(\frac{pmk}{N_z}\right), \\ C_{2nm} \approx (C_2^h)_{nm} = \frac{4}{N_z N_\phi} \times \\ \times \sum_{k=0}^{N_z-1} \left[\sum_{j=0}^{N_\phi-1} (f_s^h)_{j,k} \sin\left(\frac{2pnj}{N_\phi}\right) \right] \sin\left(\frac{pmk}{N_z}\right),$$

где $(f_s^h)_{j,k} = f(\phi_j, z_k)$.

С учётом полученных коэффициентов формула для $u_1(\rho, \phi, z)$ будет иметь вид:

$$u_1(\rho_i, \phi_j, z_k) \approx \sum_{n=0}^{N_\phi-1} \sum_{m=1}^{N_z-1} [(C_1^h)_{mn} \cos(n\phi_j) + (C_2^h)_{mn} \sin(n\phi_j)] \times \\ \times [I_n(\mu_m \rho_i) / I_n(\mu_m a)] \sin(\mu_m z_k), \\ \text{где } \rho_i = \frac{a}{N_\rho} i, \quad i = 0 \dots N_\rho - 1, \quad \phi_j = \frac{2\pi}{N_\phi} j, \quad j = 0 \dots N_\phi - 1,$$

$z_k = \frac{h}{N_z} k, \quad k = 0 \dots N_z - 1$ — множество точек, N_ρ, N_ϕ, N_z — число дискретных узлов.

Метод предполагает известными корни μ_m функций Бесселя $J_n(\mu_m)$, $n \in Z_0, m \in N$. Их величины определялись численно.

Расстояние R от источника до произвольной точки M равно

$$R(M) = R_1 \sqrt{1 + 2 \frac{r}{R_1} \cos(\phi - \varphi) + \frac{r^2 + 2z_1 \bar{z} + \bar{z}^2}{R_1^2}}, \quad (11)$$

$$R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

где $\cos \phi = x_1 / R_1, \sin \phi = y_1 / R_1$.

Численные эксперименты. Для расчётов использована модель цилиндра с линейными размерами $a = 50$ м, $H = 100$ м, $h = 250$ м (рис. 4, а). Начало координат расположено в точке O . Сравнение численного (точки) и точного (сплошная линия) решений (рис. 4, б.) показало практическое совпадение результатов в узлах сетки. Максимальная величина относительной погрешности в плоскости $\bar{z} = h/2$ при различном положении источника и числе узлов сетки $N = 8, 16, 32$ не превышала 2% (при $N = 32$) и 4% (при $N = 8$).

Задача (9)–(10) существенно упрощается, если модель среды и положение источника выбраны таким образом, чтобы потенциал не зависел от полярного угла [1].

Заключение

Декомпозиция на основе алгоритма Шварца является удобным аппаратом для полуаналитического решения сложных задач. ДАМ позволяет решение сложных задач посредством многоуровневой декомпозиции свести к совокупности некоторого числа существенно более простых подзадач. Для этого нужно иметь банк решённых задач и библиотеку модулей, обеспечивающих расчёт ЭМ-полей для класса моделей различного масштаба. Вклады в банк многомасштабного моделирования в геоэлектрике можно найти в [2–5].

ЛИТЕРАТУРА

- Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2003. 688 с.
- Ваньян Л.Л., Дебабов А.С., Юдин М.Н. Интерпретация магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. М.: Недра, 1984. 197 с.
- Заборовский А.И. Электроразведка. М.: Гостоптехиздат, 1963. 183 с.
- Серебрянникова Н.Н. Численное моделирование электрического поля точечного источника в слоистой среде с локальными включениями. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1987. 127 с.
- Уэйт Дж.Р. Геоэлектromagnetизм. М.: Недра, 1987. 235 с.
- Юдин М.Н., Спасский Б.А. Об оценке сходимости модифицированного алгоритма Шварца в прямой задаче ВЭЗ // Геофизика. 2016. № 5. С. 23–31.
- Юдин М.Н., Даев Д.С., Каринский А.Д., Севостьянов Н.А. Алгоритм Шварца. Расчёт Фурье-спектра аномального потенциала в слоистой среде, содержащей локальные тела. // Мат. Международной научно-практической конференции «Теория и практика разведочной и промысловой геофизики», 22–23 ноября 2018 г. г. Пермь: ПГНИУ, 2018. С. 312–317.
- Юдин М.Н., Румянцев А.А. Многомасштабный подход к моделированию электромагнитных полей в геоэлектрике. // Мат. Международной научно-практической конференции «Новые идеи в науках о Земле», 9–12 апреля 2013 года. г. Москва, МГРИ-РГГРУ, 2013. Том 3. М., 2013. С. 261–264.

REFERENCES

1. Budak B.M., Samarsky A.A., Tihonov A.N. *Collection of problems in mathematical physics*. M., Fizmatlit Publ., 2003, 688 p. (In Russian).
 2. Van'yan L.L., Debabov A.S., Yudin M.N. *Interpretation of magnetotelluric soundings of inhomogeneous media*. M., Nedra Publ., 1984, 197 p. (In Russian).
 3. Zaborovsky A.I. *Electrical prospecting*. M., Gostoptekhizdat Publ., 1963, 423 p. (In Russian).
 4. Serebrennikova N.N. *Numerical simulation of the electric field of a point source in a layered medium with local inclusions*. Ph.D. thesis, Perm, 1987, 127 p. (In Russian).
 5. Wait J.R. *Geoelectromagnetism*. M., Nedra Publ., 1987, 235 p. (In Russian).
 6. Yudin M.N., Spassky B.A. On the assessment of the modified Schwarz's algorithm convergence in VES direct problem. *Geophysics*, 2016, no 5, pp. 23—31. (In Russian).
 7. Yudin M.N., Daev D.S., Karinsky A.D., Sevost'yanov N.A. The Schwartz algorithm. Calculation the anomalous potential Fourier-spectr in a layered medium containing local bodies. *Collection of scientific papers «Theory and practice of exploration and petroleum geophysics»*, Perm, 2018, pp. 312—317. (In Russian).
 8. Yudin M.N., Romyanceva A.A. Multiscale approach to modeling electromagnetic fields in geoelectrics. *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference «New Ideas in Earth Sciences» MGRI-RGGRU*, April 9—12, 2013, Moscow, 2013, Vol. 3, pp. 261—264. (In Russian).
-